

Grupa A

1. Naći sve vrijednosti korijena $\sqrt[4]{z}$ ako je $z = (-1+i)^8$.
2. Data je prava $a: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-3}{1}$ i tačka $A(3,3,4)$. Naći jednačinu prave b koja prolazi kroz tačku A i okomita je na pravu a .
3. Ispitati funkciju i nacrtati joj graf: $y = \frac{(x+2)^3}{x^2-x+1}$.
4. Izračunati integral $I = \int (x+1) \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} dx$.

Grupa B

1. Riješiti sistem jednačina i diskutovati o rješenjima u zavisnosti od parametra λ :

$$\begin{aligned} (2\lambda - 1)x + \lambda y + z &= 2 - \lambda \\ \lambda x + \lambda y + z &= 1 \\ x + y + \lambda z &= 1 \end{aligned}$$
2. Tačke $A(2, y, -3)$, $C(-1, 3, 2)$, $D(2, -4, 3)$, $D_1(4, -2, -1)$ su vrhovi paralelopipeda $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Odrediti nepoznatu koordinatu tačke A tako da zapremina paralelopipeda bude jednaka 10.
3. Ispitati funkciju i nacrtati joj graf: $y = (x^2 - x)e^{\frac{1}{x}}$.
4. Izračunati integral $I = \int \frac{6 + 7 \sin x}{\sin x (5 + 4 \cos x)} dx$

Grupa C

1. Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = \frac{12 - 6x}{(x+1)^2}$.
2. Izračunati integral $\int x \ln \frac{2-x}{1+x^2} dx$
3. Riješiti matricnu jednačinu $(X \cdot A - I) \cdot B = (B - I) \cdot B$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 11 & 1 & 0 \\ -12 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$
4. Odredite jednačinu ravni π koja sadrži tačku $P(1, -1, 2)$ i pravu koja je zadana kao presjek dvije ravni $3x + y - z + 5 = 0$ i $x - y + 2z - 1 = 0$.

Grupa D

1. Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.
2. Riješiti sistem jednačina

$$x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2$$

$$9x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 5$$

$$x_1 - x_2 - x_4 + 2x_5 = 1$$

3. Izračunati integral $I = \int x^2 \sqrt{2-2x-x^2} dx$.

4. Napisati jednačinu ravni koja sadrži pravu $\frac{x-5}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{1}$ i paralelna je s pravom

$$\begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Ispit održan dana 12. 02. 2009.

Grupa A

1. Dokazati matematičkom indukcijom tvrdnju:

$$2^2 + 5^2 + 8^2 + \dots + (3n-1)^2 = \frac{n(6n^2 + 3n - 1)}{2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

2. Dati su vrhovi tetraedra $A(2, -3, 4)$, $B(-1, p, 5)$, $C(3, -2, -4)$, $D(-3, 0, 4)$. Odrediti p tako da je zapremina tetraedra jednaka $\frac{68}{3}$, a zatim izračunati visinu tetraedra spuštenu iz vrha A .

3. Ispitati funkciju i nacrtati graf: $y = (x^2 + x)e^{\frac{1}{x+1}}$.

4. Izračunati integral $I = \int \frac{3-x}{x^6 - x^5 + x^4 - x^3} dx$.

Grupa B

1. Naći sve vrijednosti korijena $\sqrt[4]{z}$, ako je $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^5 - i$.

2. Izračunati bez upotrebe L'Hopitalovog pravila $l = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+3} - 1}{2 + \sqrt[3]{x-6}}$.

3. Ispitati funkciju i nacrtati graf: $y = xe^{\frac{1}{\ln x}}$.

4. Izračunati integral $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$.

Grupa C

1. Riješiti matricnu jednačinu $X^{-1}AB = B^{-1}A^{-1}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. Naći ortogonalnu projekciju tačke $D(10,10,10)$ na ravan koja prolazi kroz tačke $A(-1,2,2)$, $B(2,2,5)$, $C(1,3,4)$.

3. Ispitati funkciju i nacrtati graf: $y = (x^3 - 2x^2)e^{-x}$.

4. Izračunati integral $\int x^3 e^{\frac{x}{2}} dx$.

Grupa D

1. Izračunati $\left[\frac{(1-i)^{54} + (1+i)^{53}}{(1+i)^{52}} \right]^4$.

2. Date su prave $a: \frac{x-1}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{1}$ i $b: \frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{4}$.

a) Odrediti m tako da se prave a i b sijeku.

b) Za nađeno m naći jednačinu ravni α koja sadrži prave a i b .

3. Ispitati funkciju i nacrtati graf: $y = \ln(2x^2 - x^4)$.

4. Izračunati integral $\int \frac{\ln^3 x}{x(\ln^2 x - 2 \ln x - 24)} dx$.

Pismeni dio ispita iz Matematike 1, 16. 04. 2009.

Grupa A

1. Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = e^{8x-x^2-14}$.

2. Izračunati integral $\int \frac{\cos x dx}{(\sin^2 x - 6 \sin x + 5)^2}$.

3. Diskutovati rješenja sistema linearnih jednačina za razne vrijednosti parametra $t \in \mathbb{R}$.

$$x + y + 2z = 1$$

$$3x + (t + 1)y + 3z = t$$

$$2x + 2y + (t - 1)z = 1.$$

4. Naći projekciju prave $p: \begin{cases} 4x - y + 3z - 6 = 0 \\ x + 5y - z + 10 = 0 \end{cases}$ na ravan $\alpha: 2x + y - z + 5 = 0$.

Grupa B

1. Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = \ln(1 + e^{-x})$.

2. Naći tačku projekcije $M(4, 3, 10)$ na pravu $p: \begin{cases} 4x - y - z + 12 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$

3. Riješiti jednačinu $z^3 = \left(\frac{8(1+i)}{\sqrt{2}} \right)^2$

4. Izračunati integral $\int (x^2 + x) \ln \frac{2x+1}{x-1} dx$.

Grupa C

1. Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = x \cdot e^{\frac{x-1}{x+1}}$.

2. Izračunati integral $\int \frac{dx}{\sin x(2 + \cos x - 2 \sin x)}$.

3. Riješiti matričnu jednačinu $XA + X = A^T$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

4. Odrediti broj m tako da se prave $l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{m}$ i $l_2: \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$ sijeku. Za tako određeno m odrediti jednačinu ravni α koja sadrži te dvije prave.

Grupa D

1. Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = (x+1)e^{\frac{1}{2}x^2-x}$.
2. Izračunati integral: $\int \frac{\sin 4x dx}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6}$
3. Odrediti pravu p koja sadrži tačku $T(-3; 1; 2)$, paralelna je ravni $\alpha: 4x - y + 2z - 5 = 0$ i siječe pravu $l: \frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$
4. Matematičkom indukcijom dokazati $\sum_{i=1}^n \frac{i^2}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

Pismeni dio ispita iz Matematike 1, 18. 06. 2009.

Grupa A

1. Izračunati $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x - 24}{\sqrt[3]{x-1} - 1}$ bez upotrebe L'Hospitalovog pravila.
2. Dati su vektori $\vec{p} = \overrightarrow{BP} = (3, 4, -2)$, $\vec{q} = \overrightarrow{BQ} = (4, 0, 2)$, $\vec{s} = \overrightarrow{BS} = (2, 1, 1)$, gdje je $B(-2, -1, 0)$. Izračunati zapreminu tetraedra $BPQS$ i površinu $\triangle PQS$.
3. Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = (x+1) \left(\frac{x-1}{x-2} \right)^2$.
4. Izračunati integral $\int \frac{x^4 - 1}{2x^2 - 10x + 13} dx$.

Grupa B

1. Dokazati matematičkom indukcijom tvrdnju $54 \mid (2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2)$ za sve $n \in \mathbb{N}$.
2. Naći jednačinu ravni koja prolazi kroz pravu $a: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{1}$, a od tačke $T(1, 2, 1)$ udaljena je za $\sqrt{3}$.
3. Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = \ln^2 x - 4 \ln x - 5$.
4. Izračunati integral $\int \frac{dx}{x^4 - 5x^2 - 6}$.

Grupa C

1. Napisati u trigonometrijskom obliku broj $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$. (Uputa: za određivanje argumenta iskoristi formulu $\cos 2\varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$).
2. Dokazati da su tačke $A(3, -4, -2)$, $B(0, 2, -4)$, $C(2, 5, 2)$, $D(5, -1, 4)$ vrhovi jednog kvadrata i naći jednačinu ravni tog kvadrata.

- Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = e^{\frac{x+1}{x}}$.
- Izračunati integral $\int \frac{x^2 + x + 3}{(x+3)(x^2 + x + 1)} dx$.

Grupa D

- Izračunati limes niza $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+7+11+\dots+(4n-5)}{(n+1)^2 - (2n-3)^2}$.
- Kroz tačku $A(-3,2,5)$ povučene su normale na ravni $4x + y - 3z + 13 = 0$ i $x - 2y + z - 11 = 0$. Naći jednačinu ravni koja sadrži te normale.
- Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = (x-3)\ln^2(x-3)$.
- Izračunati integral $\int \frac{x^3 dx}{(x^8 - 9)^2}$.

Pismeni dio ispita iz Matematike, 02. 07. 2009.

Grupa A

- Odrediti jednačinu ravni koja prolazi kroz tačke $A(8,6,3)$, B i C , gdje je tačka B presječna tačka ravni

$$x + y - 4z = 2, 2x - z = 3, 4x + y + 2z = -1, \text{ dok je tačka } C \text{ presjek prave } \frac{x-1}{1} = \frac{y+\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{z}{\frac{1}{3}} \text{ i ravni}$$

$$x + y + z = 2.$$

- Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = \frac{1}{x(\ln x - 1)}$
- Izračunati integral: $\int \frac{\arctg(3x+2)}{x^2} dx$
- Broj $z = \frac{-1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{313}$ napisati u trigonometrijskom obliku, pa naći $\sqrt[3]{z}$.

Grupa B

- Vektori $\vec{d}_1 = \vec{v} + 3\vec{w}$ i $\vec{d}_2 = 5\vec{v} + 5\vec{w}$ su dijagonale paralelograma. Izračunajte površinu tog paralelograma ako je

$$|\vec{v}| = 3, |\vec{w}| = 4 \text{ i } \angle(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\pi}{6}$$

- Ispitati saglasnost sistema i naći opšte rješenje u zavisnosti od vrijednosti parametra a :

$$x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 8$$

$$3x_1 + x_2 + 5x_3 + 16x_4 = 16$$

$$-5x_1 + 2x_2 - 12x_3 - x_4 + 8x_5 = -7$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 10x_4 + ax_5 = 8$$

- Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = (1-2x)e^{-x}$

- Izračunati integral: $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx$

Grupa C

- Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = \frac{e^{1/x}}{x-2}$.
- Izračunati integral: $\int x \cos^3 x \sin x dx$
- Odrediti tačku B koja je simetrična tački $A(-1,2,4)$ u odnosu na ravan $x - y + 2z - 4 = 0$.

4. Riješiti matricnu jednačinu: $(A - I)X(A + I) = I - A^2$, gdje je $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Grupa D

1. Ispitati sistem jednačina u zavisnosti od parametra m :

$$x + 2y - (m + 3)z = 8$$

$$2x + 3y - (m + 4)z = 12$$

$$3x + (6m + 5)y - 7z = 20$$

2. Ispitati i nacrtati graf funkcije: $y = \ln \frac{x^2}{x-1}$.

3. Izračunati integral: $\int \frac{(3+x^2)^2 \cdot x^3}{(1+x^2)^3} dx$

4. Naći koordinate ortogonalne projekcije tačke $M(-3, 7, 4)$ na pravu definisanu jednačinama $2x - y + z - 1 = 0, x + y - 3z + 1 = 0$.

Pismeni dio ispita iz Matematike, 03. 09. 2009.

Grupa A

1. Izračunati realni i imaginarni dio broja $z = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{i}{2}\right)^9}{\left(-1 + \frac{i\sqrt{3}}{3}\right)^3}$.

2. Zadane su tačke $A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(0, 1, 2), D(3, 3, 3)$. Utvrditi u kom su odnosu prave AD i BC i izračunati udaljenost tačke C od ravni ABD .

3. Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = \frac{2x^2}{2x+1} e^{\frac{1}{x}}$.

4. Izračunati integral $\int \sin^2 4x \cos^4 3x dx$.

Grupa B

1. Riješiti matricnu jednačinu $(AX^{-1}B)^{-1} = BA$, ako je $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Naći projekciju $\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a}$ vektora \vec{a} na vektor \vec{b} i površinu paralelograma razapetog nad vektorima \vec{a} i \vec{b} ako je $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = -2\vec{p} - \vec{q}$, pri čemu je $|\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3, \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{2\pi}{3}$.

3. Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = x(\ln^2 x - 2 \ln x)$.

4. Izračunati integral $\int \cos^2 x \sin^7 x dx$.

Grupa C

1. Koliko racionalnih članova ima u razvoju $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$?

- Tri uzastopna vrha paralelograma $ABCD$ su $D(-1,1,1)$, $A(-1,-5,-6)$, $B(-4,4,3)$ (nacrtati skicu). Odrediti preostali vrh C , ugao γ u trouglu ABC , te zapreminu četverostrane piramide $ABCDQ$, gdje je $Q(-8,0,7)$.
- Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = \frac{x^3}{1-x^3}$.
- Izračunati integral $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$.

Grupa D

- Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra:

$$(\lambda + 4)x + y + z = 2$$

$$x + y + z = \lambda + 5$$

$$3x + 3y + (\lambda + 7)z = 3$$

- Naći jednačinu ravni koja prolazi kroz pravu $a : \begin{cases} 4x - y + 3z - 1 = 0 \\ x + 5y - z + 2 = 0 \end{cases}$ i okomita je na ravan $\alpha : 2x - y + 5z - 3 = 0$.

- Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = \frac{(x-1)^4}{x^3}$.

- Izračunati integral $\int \frac{dx}{\sin 2x - 2 \sin x}$.

Pismeni dio ispita iz Matematike, 17. 09. 2009.

Grupa A

- Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$1 + 4^2 + 7^2 + \dots + (3n-2)^2 = \frac{n(6n^2 - 3n - 1)}{2}$$

$$x - 2y + (1 - 2\lambda)z = 2$$

- Riješiti sistem linearnih jednačina u zavisnosti od parametra $\lambda \in \mathbb{R} : x - y + (1 - \lambda)z = 1$

$$\lambda y + 9z = 3$$

- Ispitati i nacrtati graf funkcije: $y = e^{\frac{x^2}{1-x}}$.

- Izračunati integral: $\int \frac{2x^2 + 2x + 6}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}} dx$.

Grupa B

- Odredite jednačinu ravni koja prolazi kroz koordinatni početak i okomita je sa ravnima $\alpha : 2x - z - 14 = 0$ i

$\beta : x + y + z = 0$. Zatim odrediti parametar a tako da prava $\frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+4}{a}$ bude paralelna ravni β .

- Riješiti sistem linearnih jednačina Gaussovom metodom eliminacija za razne vrijednosti parametra $a \in \mathbb{R}$.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$$

$$3x_1 + x_2 - 2x_4 = 1$$

$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = a$$

3. Ispitati i nacrtati graf funkcije: $y = \ln \frac{1+x^3}{1-x^3}$.

4. Izračunati integral: $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} dx$.

Grupa C

1. Naći sve kompleksne brojeve z ako je $z^3 = (\sqrt{3}-i)^5(1+\sqrt{3}i)$.

2. Riješiti matricnu jednačinu $XA = 2X + I$ ako je matrica $A = [a_{ij}]$ formata 3×3 zadana sa $a_{ij} = |j-i|$, a I je jedinična matrica formata 3×3 .

3. Ispitati i nacrtati graf funkcije : $y = \ln \frac{2-3x}{2+3x}$

4. Izračunati integral: $\int \frac{2x^3 + x^2}{1+x^3} dx$.

Gupa D

1. Dokazati da su brojevi oblika $10^n + 18n - 1$ djeljivi sa 27 za svaki prirodan broj n .

2. Odrediti ugao između tangenti na krivu $y = \frac{x-4}{x-2}$ u presječnim tačkama te krive s koordinatnim osima.

3. Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$.

4. Izračunati integral: $\int \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{4x} + e^{3x} + e^{2x}} dx$

Pismeni dio ispita iz Matematike, oktobar 2009.

GRUPA A

1. Dokazati metodom matematičke indukcije da važi za sve prirodne brojeve n :

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

2. Dati su vrhovi trougla $A(-3, 0, 1), B(1, 1, 2), C(-1, 2, 1)$. Napisati jednačinu prave na kojoj leži visina trougla iz vrha A i odrediti presjek te prave sa pravom BC .

3. Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = \frac{(2x-1)(x^2-2x+6)}{4x^2}$.

4. Izračunati integral $I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

GRUPA B

1. Riješiti jednačinu $x^6 - \sqrt{2}x^3 + 1 = 0$ u skupu kompleksnih brojeva.

2. Prave $a: \frac{x-9}{4} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-4}{1}$, $b: \frac{x+9}{6} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{0}$, $c: \frac{x+5}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-5}{-1}$ se sijeku tako da formiraju trougao. Izračunati površinu tog trougla.
3. Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = \frac{1}{e^{2x} - 2e^x + 2}$.
4. Izračunati integral $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x^3}}}$.

GRUPA C

1. Izračunati pomoću L'Hospitalovog pravila $L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}}$.
2. Naći jednačinu prave koja siječe prave $a: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}$ i $b: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$ i paralelna je pravoj $c: \frac{x-1}{3} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-3}{2}$.
3. Ispitati funkciju i nacrtati grafik: $y = \ln \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x}$.
4. Izračunati integral $I = \int \sqrt[3]{x - x^3} dx$.

GRUPA D

1. Riješiti matricnu jednačinu $AX = (X^{-1} + B^{-1})^{-1}$, ako je $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.
2. Naći jednačinu prave koja pripada ravni $2x + 3y - z + 6 = 0$ i siječe pravu $x = 2t, y = t - 2, z = 6t + 1$ pod pravim uglom.
3. Ispitati funkciju i nacrtati grafik: $y = x + 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.
4. Izračunati integral $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^3}}$.